Granica funkcji – asymptoty wykresu funkcji

Definicja 8.

- Prostą $x = a$ nazywamy *lewostronną asymptotą pionową* krzywej o równaniu $y = f(x)$ wtedy, gdy:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty .$$

- Prostą $x = a$ nazywamy *prawostronną asymptotą pionową* krzywej o równaniu $y = f(x)$ wtedy, gdy:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty .$$

Mówimy, że prosta $x = a$ jest *obustronną asymptotą pionową* krzywej o równaniu $y = f(x)$ wtedy, gdy jest ona asymptotą pionową lewostronną i prawostronną danej krzywej.

Definicja 9.

- Prostą $y = q$ nazywamy *lewostronną asymptotą poziomą* krzywej o równaniu $y = f(x)$ wtedy, gdy:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = q .$$

- Prostą $y = q$ nazywamy *prawostronną asymptotą poziomą* krzywej o równaniu $y = f(x)$ wtedy, gdy:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = q .$$

Mówimy, że prosta $y = q$ jest *obustronną asymptotą poziomą* krzywej o równaniu $y = f(x)$ wtedy, gdy jest ona asymptotą poziomą lewostronną i prawostronną danej krzywej.

Definicja 10.

- Prostą $y = mx + n$, gdzie $m \neq 0$ nazywamy *lewostronną asymptotą ukośną* krzywej o równaniu $y = f(x)$ wtedy, gdy:

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (mx + n) \right] = 0 .$$

- Prostą $y = mx + n$, gdzie $m \neq 0$ nazywamy *prawostronną asymptotą ukośną* krzywej o równaniu $y = f(x)$ wtedy, gdy:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (mx + n) \right] = 0 .$$

Jeżeli prosta $y = mx + n$ jest asymptotą ukośną lewostronną i prawostronną krzywej o równaniu $y = f(x)$, to mówimy, że jest jej *asymptotą ukośną obustronną*.

Twierdzenie 3.

- Jeżeli istnieją granice właściwe:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad n = \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - mx \right],$$

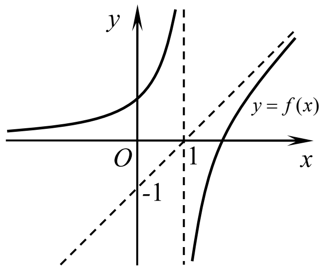
  to prosta o równaniu $y = mx + n$ jest asymptotą ukośną lewostronną krzywej $y = f(x)$.

- Jeżeli istnieją granice właściwe:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad n = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx \right],$$

  to prosta o równaniu $y = mx + n$ jest asymptotą ukośną prawostronną krzywej $y = f(x)$.

Ilustracją pojęcia asymptot wykresu funkcji jest rysunek 6.



$x = 1$ – asymptota pionowa obustronna

$y = 0$ – asymptota pozioma lewostronna

$y = x - 1$ – asymptota ukośna prawostronna

Rys. 6. Ilustracja pojęcia asymptoty wykresu funkcji

Obrazowo można powiedzieć, że pewna prosta jest asymptotą danej krzywej, jeżeli ta krzywa „zbliża” się do prostej.

Uwaga. Jeżeli krzywa posiada asymptotę poziomą danego typu, to nie trzeba już szukać asymptoty ukośnej tego typu.

Przykład 2. Wyznaczyć asymptoty wykresu funkcji:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$, b) $f(x)=x-2\operatorname{arctg}x$.

Rozwiązanie.

a) Aby wyznaczyć asymptoty wykresu funkcji obliczamy granice tej funkcji na krańcach dziedziny. Tutaj dziedziną jest $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, zatem będziemy obliczać granice w punkcie -2 (aby zbadać istnienie asymptoty pionowej) oraz w $-\infty$ i $+\infty$ (dla asymptot poziomych i ukośnych).

- *Asymptoty pionowe.*

  Ponieważ:

  $$\lim_{x\to-2^-}\frac{x^2-1}{x+2}=\left[\frac{+}{0^-}\right]=-\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to-2^+}\frac{x^2-1}{x+2}=\left[\frac{+}{0^+}\right]=+\infty,$$

  zatem prosta $x=-2$ jest asymptotą pionową obustronną.

- *Asymptoty poziome.*

  Ponieważ:

  $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}=\left[\frac{-\infty}{1}\right]=-\infty,$$

  $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}=\left[\frac{+\infty}{1}\right]=+\infty,$$

  to krzywa będąca wykresem naszej funkcji nie posiada asymptot poziomych.

- *Asymptoty ukośne.*

  Ponieważ:

  $$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2-1}{x+2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^2+2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}=1,$$

  $$n=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+2}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-1}{x+2}-\frac{x(x+2)}{x+2}\right]=$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1-2x}{x+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-1}{x}-2}{1+\frac{2}{x}} = -2,$$

zatem prosta $y = x-2$ jest asymptotą ukośną lewostronną.

Analogicznie (obliczając w taki sam sposób odpowiednie granice w $+\infty$) można wykazać, że prosta ta jest również asymptotą ukośną prawostronną, a co za tym idzie jest ona asymptotą ukośną obustronną.

b) Dziedziną funkcji $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$ jest $D_f = \mathbb{R}$. Stąd od razu stwierdzamy, że wykres danej funkcji nie posiada asymptot pionowych.

- *Asymptoty poziome*.

Ponieważ:

$$\lim_{x\to-\infty}(x-2\operatorname{arctg} x) = \left[-\infty - 2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x-2\operatorname{arctg} x) = \left[+\infty - 2\cdot\frac{\pi}{2}\right] = +\infty,$$

to krzywa będąca wykresem naszej funkcji nie posiada asymptot poziomych.

- *Asymptoty ukośne*.

Ponieważ:

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-2\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2\operatorname{arctg} x}{x}\right) = \left[1-\frac{-\pi}{-\infty}\right] = 1,$$

$$n = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right] = \lim_{x\to-\infty}(x-2\operatorname{arctg} x - x) = \lim_{x\to-\infty}(-2\operatorname{arctg} x) = \pi,$$

zatem prosta $y = x+\pi$ jest asymptotą ukośną lewostronną.

Podobnie:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-2\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2\operatorname{arctg} x}{x}\right) = \left[1-\frac{\pi}{+\infty}\right] = 1,$$

$$n = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right] = \lim_{x\to+\infty}(x-2\operatorname{arctg} x - x) = \lim_{x\to+\infty}(-2\operatorname{arctg} x) = -\pi,$$

a stąd prosta $y = x-\pi$ jest asymptotą ukośną prawostronną wykresu danej funkcji.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Wyznaczyć asymptoty wykresu funkcji:

47. $f(x)=\dfrac{5x-3}{x+2}$,

48. $f(x)=x-\dfrac{3}{x-4}$,

49. $f(x)=\dfrac{3x^2+x+2}{x^2-4}$,

50. $f(x)=\dfrac{x^3+3}{x^2-2x}$,

51. $f(x)=3x+\operatorname{arctg} x$,

52. $f(x)=x+\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{2}$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch